

**برنامه ریزی غیرخطی (نامقید)  
در  
«تحقیق در عملیات»**

تألیف:

دکتر محمد جواد اصغرپور



شماره مسلسل ۹۳۲۰

شماره انتشار ۲۵۲۶

### انتشارات دانشگاه تهران

سرشناسه	: اصغریور، محمدجواد، ۱۳۱۵-
عنوان و نام پدیدآور	: برنامه‌ریزی غیرخطی (نامقید) در "تحقیق در عملیات" / تألیف محمدجواد اصغریور.
مشخصات نشر	: تهران: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۹۴.
مشخصات ظاهری	: ۴۴۶ ص: مصور، جدول، نمودار.
فروست	: انتشارات دانشگاه تهران؛ شماره ۲۵۲۶.
شابک دوره	: 978-964-03-4440-8
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
یادداشت	: پشت‌جلد به‌انگلیسی: Mohammad Jawad Asgharpour.
یادداشت	: Nonlinear- Programming (Unconstrained) in "Operation- Research."
یادداشت	: چاپ سوم.
یادداشت	: کتابنامه: ص. [۴۴۱]-۴۴۳.
موضوع	: برنامه‌نویسی غیرخطی
موضوع	: تحقیق عملیاتی
شناسه افزوده	: دانشگاه تهران. مؤسسه انتشارات
رده‌بندی کنگره	: ۱۳۹۶ ب۴ الف / ۵۷/۸ T
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۹/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۲۲۹۴۰۹

این کتاب مشمول قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان است. تکثیر کتاب به هر روش اعم از فتوکپی، ریسوگرافی، تهیه فایل‌های pdf، لوح فشرده، بازنویسی در وبلاگ‌ها، سایت‌ها، مجله‌ها و کتاب، بدون اجازه کتبی ناشر مجاز نیست و موجب پیگرد قانونی می‌شود و تمامی حقوق برای ناشر محفوظ است.

ISBN:978-964-03-4440-8



9 789640 344408

عنوان: برنامه‌ریزی غیرخطی (نامقید) در تحقیق در عملیات

تألیف: دکتر محمدجواد اصغریور

نوبت چاپ: سوم

تاریخ انتشار: ۱۳۹۶

شمارگان: ۵۰۰ نسخه

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

چاپ و صحافی: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

«مسئولیت صحت مطالب کتاب با مؤلف است»

بها: ۲۸۰۰۰۰ ریال

خیابان کارگر شمالی - خیابان شهید فرشی مقدم - مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

پست الکترونیک: [press@ut.ac.ir](mailto:press@ut.ac.ir) - تارنما: <http://press.ut.ac.ir>

پخش و فروش: تلفکس ۸۸۳۳۸۷۱۲

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

## فهرست

مقدمه مؤلف .....	۹
فصل یکم - مقدمه .....	۱۳
۱ - ۱. بیان مسئله .....	۱۴
۱ - ۲. موارد خاصی از N. L. P .....	۱۵
الف: برنامه‌ریزی خطی .....	۱۵
ب: برنامه‌ریزی از توان دوم .....	۱۶
ج: برنامه‌ریزی محدب .....	۱۶
د: برنامه‌ریزی کسری (خطی) .....	۱۶
ه: برنامه‌ریزی قابل تفکیک .....	۱۷
و: برنامه‌ریزی هندسی .....	۱۷
ز: برنامه‌ریزی احتمالی .....	۱۸
ط: برنامه‌ریزی فازی .....	۱۹
۱ - ۳. کاربردهائی چند از N. L. P .....	۱۹
۱ - ۴. برخی ویژگی‌های ممکن از حل یک N. L. P .....	۲۹
۱ - ۵. نکات ویژه مدل‌سازی از یک N. L. P؛ .....	۳۹
مثال .....	۴۳
مسائل .....	۴۵
فصل دوم - زمینه‌های لازم ریاضی .....	۵۱
۲ - ۱. در زمینه دنباله نقاط برداری از یک مجموعه: .....	۵۱
۲ - ۲. در زمینه توابع .....	۵۵
۲ - ۳. در زمینه برخی از عملیات برداری و ماتریسی .....	۶۰
تعریف - تبدیل ردیفی (یا ستونی)، معروف به یک تبدیل اولیه، .....	۶۹

تعریف:	۸۲
مسائل	۸۷
<b>فصل سوم - مجموعه‌های محدب و توابع محدب</b>	۹۱
۳-۱. تعاریف	۹۱
۳-۲. زیررویه پشتیبان‌کننده	۹۹
مخروط محدب	۱۰۳
مخروط قطبی	۱۰۳
برخی از ویژگیهای یک مخروط قطبی:	۱۰۴
۳-۳. نقاط حدی و جهات حدی	۱۰۴
نقاط و جهات حدی از یک «چندوجهی»	۱۰۶
توابع محدب	۱۱۱
۳-۴. تعاریف:	۱۱۱
حل یک برنامه‌ریزی محدب	۱۱۷
۳-۶. کمینه و بیشینه از یک تابع	۱۳۱
کمینه از یک تابع محدب	۱۳۱
نتایج عمده از قضیه فوق:	۱۳۴
الف) برای کمینه‌سازی، یک جهت حرکت	۱۳۴
ب) برای کمینه تابع محدب	۱۳۴
مثال:	۱۳۶
بیشینه از یک تابع محدب	۱۳۸
تابع محدب و تنوع آن	۱۴۰
الف) هر تابع محدب قاطع نیز نیمه -	۱۴۳
ب) هر تابع نیمه - محدب قوی نیز نیمه -	۱۴۳
ج) هر تابع نیمه - محدب قوی نیز یک نیمه -	۱۴۴
تحدب در یک نقطه مفروض	۱۴۶
الف) تحدب در نقطه $x \in E$ :	۱۴۶
ب) تحدب قاطع در نقطه $x \in E$ :	۱۴۶
ج) نیمه - تحدب در نقطه $x \in E$ :	۱۴۶

- ۱۴۷ ..... (د) شبه - تحذب در نقطه  $x\bar{E}$ :  
 ۱۴۸ ..... مسائل
- ۱۵۹ ..... فصل چهارم - بهینه‌سازی بدون محدودیت
- ۱۶۰ ..... ۱-۴. تجسس خطی (برای توابع یک متغیره و بدون استفاده از مشتق)  
 ۱۶۲ ..... ۱-۱-۴. تجسس یکنواخت  
 ۱۶۳ ..... ۲-۱-۴. تجسس متوالی  
 ۱۶۳ ..... ۱-۲-۱-۴. روش «سه نقطه‌ای»  
 ۱۶۴ ..... مثال ۱-۲-۱-۴  
 ۱۶۵ ..... ۲-۲-۱-۴. روش دوبخشی  
 ۱۶۶ ..... مثال ۲-۲-۱-۴  
 ۱۶۸ ..... ۳-۲-۱-۴. روش «فیوناچی»  
 ۱۶۹ ..... الگوریتم «فیوناچی»  
 ۱۷۱ ..... مثال ۳-۲-۱-۴  
 ۱۷۵ ..... نتیجه‌گیری:  
 ۱۷۶ ..... ۴-۲-۱-۴. روش «گلدن»  
 ۱۷۷ ..... مثال ۴-۲-۱-۴  
 ۱۸۰ ..... ۵-۲-۱-۴. برازش از یک تابع از توان دوم  
 ۱۸۲ ..... ۲-۴. تجسس خطی (برای توابع یک متغیره و با استفاده از مشتق)  
 ۱۸۲ ..... ۱-۲-۴. روش نیمه - بخشی  
 ۱۸۳ ..... مثال ۱-۲-۴  
 ۱۸۴ ..... ۲-۲-۴. استفاده از مشتقات متوالی  
 ۱۸۷ ..... ۳-۲-۴. روش نیوتون  
 ۱۸۸ ..... مثال ۳-۲-۴  
 ۱۸۹ ..... ۱-۳-۲-۴. سرعت همگرایی (فوق خطی)  
 ۱۹۲ ..... ۳-۳-۲-۴. منطقی برای همگرایی (با توقف)  
 ۱۹۲ ..... قضیه ۴-۳-۲-۴  
 ۱۹۳ ..... ۵-۳-۲-۴. یک روش تصحیح شده از الگوریتم نیوتون  
 ۱۹۶ ..... مثال ۵-۳-۲-۴

- ۱۹۸ ..... محاسبه  $f \in \mathcal{E}(x)$  به روش تقریبی. ۶-۳-۲-۴
- ۱۹۹ ..... فرایند SSP. ۴-۲-۴
- ۲۰۱ ..... قانون یکم از Armijo (در حد بسط از مرتبه یکم تیلور). ۱-۴-۲-۴
- ۲۰۲ ..... قانون دوم از Armijo (در حد بسط از مرتبه دوم تیلور). ۲-۴-۲-۴
- ۲۰۴ ..... (برای توابع چند متغیره و بدون استفاده از مشتق). ۳-۴
- ۲۰۴ ..... حرکت سیکلی در طول مؤلفه‌ها. ۱-۳-۴
- ۲۰۵ ..... مثال ۱-۳-۴
- ۲۰۹ ..... متد «هوگ و جیو». ۲-۳-۴
- ۲۱۱ ..... متد «هوگ و جیو» با استفاده از تجسس خطی. ۱-۲-۳-۴
- ۲۱۲ ..... مثال ۱-۲-۳-۴
- ۲۱۸ ..... متد هوگ و جیو» با استفاده از حرکات گسسته. ۲-۲-۳-۴
- ۲۲۰ ..... مثال ۲-۲-۳-۴
- ۲۲۴ ..... متد «رزنبراک». ۳-۳-۴
- ۲۲۶ ..... (برای توابع چند متغیره و با استفاده از مشتق). ۴-۴
- ۲۲۶ ..... استفاده از مشتقات متوالی. ۱-۴-۴
- ۲۲۷ ..... قضیه ۱-۱-۴-۴
- ۲۳۰ ..... قضیه ۲-۱-۴-۴
- ۲۳۰ ..... مثال ۱-۴-۴
- ۲۳۲ ..... حرکت سیکلی در طول مؤلفه‌ها. ۲-۴-۴
- ۲۳۳ ..... روش کوشی (تندترین نشیب). ۳-۴-۴
- ۲۳۴ ..... مثال ۳-۴-۴
- ۲۴۰ ..... روش نیوتون. ۴-۴-۴
- ۲۴۱ ..... مثال ۴-۴-۴
- ۲۴۶ ..... روش تصحیح شده نیوتون. ۱-۴-۴-۴
- ۲۵۲ ..... مثال ۱-۴-۴-۴ [۵]
- ۲۵۴ ..... جهات همجوار. ۵-۴-۴
- ۲۵۹ ..... روش‌های شبه-نیوتونی. ۱-۵-۴-۴
- ۲۶۱ ..... مثال ۱-۵-۴-۴
- ۲۶۸ ..... روش‌های گرادیان - همجوار. ۲-۵-۴-۴
- ۲۷۲ ..... الگوریتم  $F . R$ . ۱-۲-۵-۴-۴

۲۷۳	مثال ۴-۴-۵-۲-۱
۲۷۶	۴-۴-۵-۲-۲. متد «زانگویل»
۲۷۸	مثال ۴-۴-۵-۲-۲ [۱۴]
۲۸۲	۴-۴-۵-۳. روش مصوّر
۲۸۵	مسائل
۲۹۳	فصل پنجم - شروط لازم و کافی برای بهینگی
۲۹۴	شروط لازم و کافی بهینگی برای مسائل مقید (با محدودیت)
۲۹۴	۱-۵. شرایط هندسی بهینگی
۲۹۸	۲-۵. شروط لازم بهینگی از $F$
۳۰۱	مثال ۱-۲-۵
۳۰۶	مثال ۲-۲-۵
۳۰۷	۳-۵. شروط لازم بهینگی از KKT
۳۱۰	مثال ۱-۳-۵
۳۱۰	برنامه‌ریزی خطی حاصل از مسئله اصلی
۳۱۳	مثال ۲-۳-۵
۳۱۶	۴-۵. ویژگی‌های محدودکننده (CQ's)
۳۱۹	۵-۵. شروط درجه دوم لازم و کافی برای مسائل مقید
۳۱۹	قضیه ۵-۵-۱ (شروط لازم درجه دوم از بهینگی):
۳۲۲	۵-۵-۲. (شروط کافی از بهینگی)
۳۲۴	مثال ۵-۵-۲ (McCormick : 1967)
۳۲۶	۵-۵-۳. کاربردهائی از شرایط بهینگی
۳۲۶	۱- تأمین شرایط کافی بهینگی در صورت تأمین شرایط لازم درجه اول و درجه دوم.
۳۲۹	۲- (اساس مفهومی الگوریتم‌ها)
۳۳۰	۳- (تجزیه و تحلیل حساسیت)
۳۳۳	مثال ۵-۵-۳ (McCormick ; 1983)
۳۳۴	حل:
۳۳۷	توجه:
۳۳۸	۴- (دسترسی به بهینه سراسری)
۳۳۹	مسائل

۳۵۳	فصل ششم - دوگان لاگرانژین و نقطهٔ زینی
۳۵۳	(شرایط بهینگی)
۳۵۵	۱-۶ - تفسیر هندسی از دوگان «لاگرانژین»
۳۵۸	مثال ۱-۶-۱ [۴]:
۳۶۰	مثال ۱-۶-۲. (وجود «شکاف دوگان»)
۳۶۱	۲-۶ - قضیه ضعیف همثاتی
۳۶۲	۳-۶. نقطهٔ زینی
۳۶۶	۱-۳-۶ - شرایط نقطهٔ زینی در مقایسه با شرایط KKT
۳۶۷	مثال ۱-۳-۶
۳۷۰	۴-۶ - خصوصیات تابع $y(l, v)$
۳۷۱	۲-۴-۶ - مشتق‌پذیری تابع $y(u)$
۳۷۲	مثال ۱-۲-۴-۶
۳۷۵	مثال ۲-۲-۴-۶
۳۸۱	۵-۶ - حل برنامهٔ «دوگان لاگرانژین»
۳۸۲	۱-۵-۶ - روش گرادیان در حل یک برنامهٔ دوگان
۳۸۳	مثال ۱-۵-۶
۳۸۶	۲-۵-۶ - روش زیرشیب
۳۸۹	مثال ۲-۵-۶
۳۹۵	۳-۵-۶ - روش صفحه «بُرش»
۳۹۸	مثال ۳-۵-۶
۴۰۴	۶-۶ - روش تعمیم یافتهٔ لاگرانژین
۴۰۷	مثال ۶-۶
۴۰۹	مسائل
۴۱۹	پیوست
۴۲۰	جنبه‌های محاسباتی و تهیه نرم‌افزار کامپیوتری برای
۴۲۰	برنامه‌ریزی غیرخطی (و آدرس‌هایی از «اینترنت»)
۴۴۱	منابع و مأخذ



## مقدمه مؤلف

از همان ابتدای تحصیل، نشأت عشق را در سایه ریاضیات به عمق دل حس کردم، و سرانجام با توشه‌ای ناچیز از اقیانوس بیکران ریاضیات به دام عشق گرفتار آمدم، به گونه‌ای که امروز در این دام از وجود این همه منطق و عظمت سرگردان مانده‌ام، لیک در مسرتم که سایه وجود خالق هستی را در این سرای عشق حس می‌کنم... عاشق شده‌ام، اما سفر... آرام... آرام... ولی به طور مطمئن رو به پایان است. و پیوستن به معشوق را نوید می‌دهد...

محمد جواد اصغرپور

پاییز ۱۳۸۰

موجب مسرت است که امروزه پس از گذرای سالیان دراز از اولین تألیف اینجانب در «تحقیق در عملیات» شاهد بر ترجمه‌ها و تألیفات متعددی در این رشته‌ام. این امید همواره روشنی‌بخش زوایای تاریک از زندگی علمی اینجانب بوده است که شاهد اوج شکوفایی این رشته در دانشگاه‌های ایران زمین باشم.

کتاب حرفه‌ای حاضر در «برنامه‌ریزی غیرخطی» به دنبال انتشار هفت جلد قبلی در «تحقیق در عملیات» تقدیم دوستداران این رشته می‌گردد. امید است که مقبول عاشقان دانش و ریاضی واقع شود. قصورات و اشتباهات مرا در تألیف این مباحث زیبای ریاضی به دینده اغماض بنگرید که از هم اکنون محدود بودن دانش خود را پذیرفته و به فقر درون معترفم. ابتدا بر آن بودم که یک کتاب در کلیه مباحث غیرخطی به تألیف درآورم، اما حجیم بودن مطالب موجب شد که بخش مدل‌های نامقید (مدل‌های بدون محدودیت) را در تألیف حاضر

منظور کرده و بخش بهینه‌سازی مقید (مدل‌های با محدودیت) را به تألیف بعدی موکول نمایم. کتاب حاضر علاوه بر بهینه‌سازی نامقید، مجموعه‌های محدب، توابع محدب، شرایط لازم و کافی برای مدل‌های مقید، و برنامه‌دوگان لاگرانژین را دربر می‌گیرد. در ضمن، پایان هر فصل شامل تمرینات کافی برای دانشجو می‌باشد.

فصل اول کتاب شامل مقدمه‌ای بر موارد خاص از  $N. L. P$  است: از جمله برنامه‌ریزی هندسی، کاربردهایی چند از  $N. L. P$  مانند برنامه‌ریزی تولید، ویژگی‌های ممکن از حل یک  $N. L. P$  همچون بهینه موضعی در مقابل بهینه سراسری، توصیه نکات ویژه‌ای در مدلسازی از یک  $N. L. P$

زمینه‌های لازم ریاضی در فصل دوم گنجانیده شده است، به گونه‌ای که دانشجویان غیرحرفه‌ای می‌توانند این فصل را ندیده بگیرند. فصل مذکور شامل مقدمه‌ای بر جبر خطی، مشتق پذیری توابع، برخی عملیات ماتریسی، فضای خنثی از یک ماتریس، معکوسه پسودو، معکوسه پنورس، فرایند قطری کردن یک ماتریس، فاکتوریزه کردن یک ماتریس و توابع فاکتورپذیر می‌گردد.

فصل سوم دربرگیرنده مجموعه‌های محدب و توابع محدب است. در بحث مجموعه‌های محدب مطالبی همچو تعریف تحدب، زبرویه پشتیبان‌کننده، مخروط محدب، نقاط و جهات جدی از یک «چندوجهی» تشریح می‌گردد.

بخش توابع محدب شامل شرایط لازم و کافی برای محدب بودن یک تابع، تشخیص همیشه مثبت بودن یک ماتریس مربع، زیرشیب‌ها، کمینه و بیشینه از یک تابع، برنامه‌ریزی محدب، تابع محدب و تنوع آن، توابع نیمه - محدب و شبه - محدب، و تحدب در یک نقطه مفروض می‌شود.

بهینه‌سازی بدون محدودیت (توابع نامقید) در فصل چهارم کتاب منظور شده است. این بهینه‌سازی‌ها به بهینه‌سازی برای توابع تک متغیره و توابع چند متغیره تقسیم می‌گردند. به طوری که در هر بخش، بهینه‌سازی بدون استفاده از مشتق و با استفاده از مشتق مورد بحث است. الگوریتم‌های متعددی (بدون استفاده از مشتق) همچو الگوریتم سه نقطه‌ای، الگوریتم فیبوناچی، الگوریتم هوگ و جیو، و الگوریتم سیکلی تشریح گردیده‌اند. الگوریتم‌های دیگری با استفاده از مشتق مانند روش نیوتون، مشتقات متوالی، فرایند SSP، روش کوشی، و الگوریتم‌های با استفاده از جهات همجوار به صورت تفصیلی بیان شده‌اند.

شرط لازم و کافی بهینگی برای بهینه‌سازی مقید (مدل‌های توأم با محدودیت) در فصل پنجم مورد بحث واقع می‌شود. شرط هندسی بهینگی، شرط «فریتز - جان»، شرط

کوهن - تاگر، ویژگی‌های محدودکننده، شرایط لازم و کافی درجه اول و درجه دوم، و کاربردهایی از شرایط بهینگی در این فصل به تفصیل مورد بحث واقع شده‌اند.

فصل ششم کتاب شامل دوگان لاگرانژین و نقطه زینی است. در این فصل مطالبی همچو تفسیر هندسی از یک دوگان، قضایای ضعیف و قوی همتایی، نقطه زینی، مقعر بودن تابع دوگان، مشتق پذیری و مشتق ناپذیری دوگان، روشهای حل یک تابع دوگان (روش گرادیان، روش زیرشیب، روش ژرش)، استخراج یک راه‌حل عملی برای برنامه اولیه با استفاده از انتقالات موجود از برنامه دوگان، و روش تعمیم یافته لاگرانژین مورد بحث قرار خواهد گرفت.

سرانجام، یک «پیوست» به انتهای کتاب ضمیمه شده است. این پیوست شامل جنبه‌های محاسباتی از نظر نرم‌افزارهای کامپیوتری، ارائه نرم‌افزارهایی چند در حل مدل‌های غیرخطی و مشخص کردن آدرس‌هایی چند از «اینترنت» برای جستجو به منظور دسترسی به نرم‌افزارهای غیرخطی می‌باشد.

کتاب حاضر را به روح بزرگوار مادرم تقدیم می‌دارم، چه هرگز بدون فداکاریها و از خودگذشتگی‌های آن عزیز، حتی ادامه تحصیل برای من امکان‌پذیر نبود.

در ضمن، از آقای مهندس کوروش قاسمی (دانشجوی دکتری در مهندسی صنایع) کمال تشکر را دارم که از هیچ کوششی در همکاری و تهیه هفت بسته نرم‌افزاری (به پیوست) برای استفاده از تسهیلات کامپیوتری دریغ ننمودند.