

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# روش اجزای محدود در تحلیل ارتعاشات

تالیف

مهندس علی وزیری آستانه  
کارشناس ارشد دانشکده مهندسی عمران  
دانشگاه تهران

دکتر ایرج محمودزاده کنی  
استاد دانشکده مهندسی عمران  
دانشگاه تهران



## انتشارات دانشگاه تهران

شماره ۳۲۳۹

شماره مسلسل ۸۰۴۹

محمودزاده کنی، ایرج، ۱۳۳۴ -  
روش اجزای محدود در تحلیل ارتعاشات / تألیف ایرج محمودزاده کنی، علی وزیری  
آستانه. تهران: دانشگاه تهران. مؤسسه انتشارات، ۱۳۹۰.  
ع، ۵۹۱ ص.: مصور، جدول، نمودار. (انتشارات دانشگاه تهران؛ شماره ۳۲۳۹).  
**ISBN 978-964-03-6257-0**

چاپ دوم.  
فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا.  
کتابنامه.  
ارتعاش. روش المان‌های محدود. سازه، تجزیه و تحلیل. وزیری آستانه، علی. دانشگاه تهران.  
مؤسسه انتشارات.  
۱۳۹۳ ۶۲۰/۳ TA ۳۵۵ / م ۳ ر ۹  
شماره کتابشناسی ملی ۲۵۰۲۷۷۶

عنوان: روش اجزای محدود در تحلیل ارتعاشات  
تألیف: دکتر ایرج محمودزاده کنی - مهندس علی وزیری آستانه

نوبت چاپ: دوم

تاریخ انتشار: ۱۳۹۳

شمارگان: ۵۰۰ نسخه

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

چاپ و صحافی: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

ISBN:978-964-03-6257-0



9 789640 362570

«مسئولیت صحت مطالب کتاب با مؤلفان است»

«کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است»

بها: ۳۰۰۰۰۰ ریال

خیابان کارگر شمالی - خیابان شهید فرشی مقدم - مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

پست الکترونیک: [press@ut.ac.ir](mailto:press@ut.ac.ir) - تارنما: <http://press.ut.ac.ir>

پخش و فروش: تلفکس ۸۸۰۱۲۰۷۸

## فهرست مطالب

فصل اول فرمول‌بندی معادلات حرکت .....	۱
۱,۱ تعادل دینامیکی.....	۱
۲,۱ اصل تغییر مکان‌های مجازی .....	۵
۳,۱ اصل همپلتون .....	۶
۴,۱ معادلات لاگرانژ .....	۱۰
۵,۱ معادلات حرکت سیستم مقید .....	۱۵
مسئله‌ها .....	۱۸
فصل دوم توابع انرژی المان .....	۲۳
۱,۲ المان‌های محوری .....	۲۴
۲,۲ المان پیچشی .....	۲۶
۳,۲ المان تیر خمشی .....	۲۸
۴,۲ المان تیر خمشی عمیق .....	۳۰
۵,۲ المان غشایی.....	۳۲
۶,۲ المان صفحه خمشی نازک.....	۳۵
۷,۲ المان صفحه خمشی ضخیم.....	۳۶
۸,۲ جسم سه‌بعدی .....	۳۸
۹,۲ جسم سه‌بعدی با تقارن محوری.....	۴۰
۱۰,۲ تابع اتلاف.....	۴۲
۱۱,۲ معادلات حرکت و شرایط مرزی .....	۴۴
مسئله‌ها .....	۴۹
فصل سوم آشنایی با روش تغییر مکان اجزای محدود .....	۵۳
۱,۳ روش ریلی-رتیز .....	۵۳
۲,۳ روش تغییر مکان اجزای محدود .....	۶۳
۳,۳ ارتعاش محوری میله‌ها .....	۶۶
۴,۳ ارتعاش پیچشی محورها .....	۸۲
۵,۳ ارتعاش خمشی تیرها .....	۸۵
۶,۳ ارتعاش قاب‌های مسطح .....	۹۱
۷,۳ ارتعاش قاب‌های سه‌بعدی .....	۹۹
۸,۳ تکنیک‌هایی برای افزایش دقت المان‌ها .....	۱۰۷

۱۱۲.....	۹,۳ اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی
۱۱۹.....	۱۰,۳ انتگرال گیری عددی
۱۳۱.....	۱۱,۳ سایر ملاحظات برای تیرها
۱۳۴.....	مسئله‌ها

**فصل چهارم ارتعاش مسطح صفحات..... ۱۳۹**

۱۴۱.....	۱.۴ المان خطی مثلثی
۱۴۸.....	۲.۴ المان خطی مستطیلی
۱۵۶.....	۳.۴ المان چهارضلعی خطی
۱۶۱.....	۴.۴ مختصات مساحتی برای المان‌های مثلثی
۱۶۲.....	۵.۴ المان مثلثی خطی در مختصات مساحتی
۱۶۵.....	۶.۴ افزایش دقت المان‌ها
۱۷۰.....	مسئله‌ها

**فصل پنجم ارتعاش اجسام سه‌بعدی..... ۱۷۵**

۱۷۵.....	۱.۵ اجسام سه‌بعدی متقارن محوری
۱۷۷.....	۲.۵ بارگذاری واردشده
۱۸۰.....	۳.۵ تغییر مکان‌ها
۱۸۰.....	۴.۵ عبارات انرژی کاهش یافته
۱۸۱.....	۵.۵ المان مثلثی خطی
۱۹۱.....	۶.۵ المان‌های مرکزی
۱۹۴.....	۷.۵ اجسام سه‌بعدی دلخواه
۱۹۶.....	۸.۵ شش‌وجهی مکعب مستطیل
۲۰۲.....	۹.۵ المان شش‌وجهی هم‌پارامتر
۲۰۷.....	۱۰.۵ پنج‌وجهی قائم
۲۱۱.....	۱۱.۵ مختصات حجمی برای چهاروجهی
۲۱۴.....	۱۲.۵ المان چهاروجهی
۲۱۷.....	۱۳.۵ افزایش دقت المان‌ها
۲۲۵.....	مسئله‌ها

**فصل ششم ارتعاش خمشی صفحات..... ۲۲۷**

۲۲۹.....	۱.۶ المان مستطیلی نازک (ناهمخوان)
۲۴۲.....	۲.۶ المان مستطیلی نازک (همخوان)

فهرست □ ز

۲۴۶	۳.۶ المان مستطیلی ضخیم
۲۵۵	۴.۶ المان مثلثی نازک (ناهمخوان)
۲۶۳	۵.۶ المان مثلثی نازک (همخوان)
۲۶۴	۱.۵.۶ مختصات کارتزین
۲۷۰	۲.۵.۶ مختصات مساحتی
۲۷۶	۶.۶ المان مثلثی ضخیم
۲۷۹	۷.۶ سایر المان‌های صفحه خمشی
۲۸۸	مسئله‌ها

فصل هفتم ارتعاش صفحات تقویت‌شده و سازه‌های صفحه‌ای تاشده ..... ۲۹۳

۲۹۳	۱.۷ صفحات تقویت‌شده I
۲۹۹	۲.۷ صفحات تقویت‌شده II
۳۰۵	۳.۷ صفحات تاشده I
۳۰۷	۴.۷ صفحات تاشده II
۳۰۹	۵.۷ صفحات تاشده III
۳۱۳	مسئله‌ها

فصل هشتم تحلیل ارتعاش آزاد ..... ۳۱۵

۳۱۵	۱.۸ مقدمات
۳۲۲	۱.۱.۸ تعامد بردارهای ویژه
۳۲۳	۲.۱.۸ تبدیل به شکل استاندارد
۳۲۷	۲.۸ دنباله اشتروم
۳۳۵	۳.۸ تبدیل متعامد یک ماتریس
۳۳۷	۴.۸ روش ژاکوبی
۳۴۰	۵.۸ روش‌های گیونز و هاوس هولدر
۳۴۰	۱.۵.۸ روش گیونز
۳۴۲	۲.۵.۸ روش هاوس هولدر
۳۴۳	۶.۸ مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس متقارن سه‌قطری
۳۴۳	۱.۶.۸ روش دومقطعی
۳۴۶	۲.۶.۸ تکرار معکوس
۳۵۰	۷.۸ روش‌های LR، QR و QL
۳۵۱	۱.۷.۸ روش LR
۳۵۲	۲.۷.۸ روش QR

ح □ روش اجزای محدود در تحلیل ارتعاشات

۳۵۴	..... روش QL ۳.۷.۸
۳۵۶	..... کاهش تعداد درجات آزادی ۸.۸
۳۵۶	..... استفاده از تقارن ۱.۸.۸
۳۵۹	..... سازه‌های متناوب دورانی ۲.۸.۸
۳۶۴	..... حذف درجات آزادی غیرلازم ۳.۸.۸
۳۶۹	..... ترکیب مودهای مؤلفه‌ای ۴.۸.۸
۳۷۰	..... روش اتصال گیردار ۱.۴.۸.۸
۳۷۳	..... روش اتصال آزاد ۲.۴.۸.۸
۳۷۷	..... حل مسائل بزرگ مقادیر ویژه ۹.۸
۳۷۷	..... روش دومقطعی - تکرار معکوس ۱.۹.۸
۳۷۸	..... روش تکرار در زیرفضا ۲.۹.۸
۳۸۰	..... روش تکرار همزمان ۳.۹.۸
۳۸۱	..... روش لנסاز ۴.۹.۸
۳۸۴	..... مسئله‌ها

فصل نهم پاسخ دینامیکی تحت نیرو I ۳۸۵

۳۸۵	..... تحلیل مودال ۱.۹
۳۸۷	..... معرفی میرایی ۲.۹
۳۸۷	..... میرایی سازه‌ای ۱.۲.۹
۳۸۸	..... میرایی ویسکوز ۲.۲.۹
۳۹۰	..... پاسخ هارمونیک ۳.۹
۳۹۱	..... تحلیل مودال ۱.۳.۹
۴۰۱	..... تحلیل مستقیم ۲.۳.۹
۴۰۹	..... پاسخ به تحریک متناوب ۴.۹
۴۱۳	..... پاسخ گذرا ۵.۹
۴۱۳	..... تحلیل مودال ۱.۵.۹
۴۱۷	..... روش تفاضل مرکزی ۱.۱.۵.۹
۴۲۳	..... روش هوبالت ۲.۱.۵.۹
۴۲۹	..... روش نیومارک ۳.۱.۵.۹
۴۳۵	..... روش ویلسون $\theta$ ۴.۱.۵.۹
۴۳۸	..... تحلیل مستقیم ۲.۵.۹
۴۳۸	..... روش تفاضل مرکزی ۱.۲.۵.۹

فهرست □ ط

۴۴۴	..... روش هوبالت ۲.۲.۵.۹
۴۴۴	..... روش نیومارک ۳.۲.۵.۹
۴۴۵	..... روش ویلسون $\theta$ ۴.۲.۵.۹
۴۴۶	..... انتخاب گام زمانی ۳.۵.۹
۴۴۷	..... مسئله‌ها

فصل دهم پاسخ دینامیکی تحت نیرو II ۴۴۹

۴۴۹	..... ۱.۱.۰ پاسخ به تحریک تصادفی
۴۴۹	..... ۱.۱.۱.۰ معرفی تحریک
۴۶۲	..... ۲.۱.۱.۰ پاسخ سیستم یک درجه آزادی
۴۶۶	..... ۳.۱.۱.۰ پاسخ مستقیم سیستم چند درجه آزادی
۴۷۰	..... ۴.۱.۱.۰ پاسخ مودال سیستم چند درجه آزادی
۴۷۲	..... ۵.۱.۱.۰ خستگی و شکست
۴۷۵	..... ۲.۱.۰ تحلیل مودال منقطع شده
۴۷۹	..... ۱.۲.۱.۰ روش شتاب مود
۴۸۱	..... ۲.۲.۱.۰ پسماند انعطاف پذیری
۴۸۲	..... ۳.۱.۰ پاسخ به تغییر مکان های اعمالی
۴۸۲	..... ۱.۳.۱.۰ پاسخ مستقیم
۴۸۵	..... ۲.۳.۱.۰ پاسخ مودال
۴۸۷	..... ۴.۱.۰ روش های طیف پاسخ
۴۸۷	..... ۱.۴.۱.۰ سیستم های یک درجه آزادی
۴۹۱	..... ۲.۴.۱.۰ سیستم های چند درجه آزادی
۴۹۵	..... ۵.۱.۰ کاهش تعداد درجات آزادی
۴۹۶	..... ۱.۵.۱.۰ استفاده از تقارن
۴۹۷	..... ۲.۵.۱.۰ سازه های متناوب دوار
۴۹۹	..... ۳.۵.۱.۰ حذف درجات آزادی غیر لازم
۴۹۹	..... ۴.۵.۱.۰ روش ترکیب مودهای مؤلفه ای

فصل یازدهم تکنیک های تحلیل کامپیوتری ۵۰۱

۵۰۳	..... ۱.۱.۱ ساختار برنامه
۵۰۳	..... ۱.۱.۱.۱ پیش پردازش
۵۱۲	..... ۲.۱.۱.۱ مرحله تحلیل
۵۱۲	..... ۳.۱.۱.۱ پس پردازش

ی □ روش اجزای محدود در تحلیل ارتعاشات

۵۱۳.....	۲.۱۱ مدل سازی.....
۵۲۰.....	۳.۱۱ استفاده از برنامه‌های تجاری.....

فصل دوازدهم معرفی برنامه DLEARN..... ۵۲۵

۵۲۵.....	۱.۱۲ مقدمه.....
۵۲۶.....	۲.۱۲ روش ساخت فایل ورودی.....
۵۲۹.....	۳.۱۲ روش اجرای برنامه.....
۵۲۹.....	۴.۱۲ مثال‌های حل شده.....
۵۳۷.....	مسئله‌ها.....

پیوست..... ۵۳۹

پاسخ مسائل..... ۵۴۵

کتاب‌شناسی..... ۵۴۹

منابع..... ۵۵۱

فهرست راهنما- واژه‌نامه..... ۵۶۳



## مقدمه

در زمینه روش اجزای محدود، کتاب‌های فراوانی وجود دارند، اما تعداد آنهایی که فراتر از بحثی موجز و مختصر درباره کاربرد روش اجزای محدود در تحلیل ارتعاشات سازه‌ها به دست می‌دهند، اندک است. روش اجزای محدود یک روش بسیار مهم در مدل‌سازی رفتار سازه‌ها در برابر بارهای دینامیکی است.

برای مطالعه کتاب پیش‌رو به هیچ دانش اولیه‌ای از روش اجزای محدود نیاز نیست؛ البته افرادی که با تحلیل استاتیکی اجزای محدود آشنا هستند، بخش زیادی از کتاب را سودمند خواهند یافت. این کتاب به صورتی نوشته شده است که می‌تواند مورد استفاده مهندسان عمران، مکانیک، هوافضا و همچنین طراحان کشتی و نظایر اینان قرار گیرد. در سرتاسر کتاب مراجع کاربردی مختلفی برای این رشته‌ها ذکر شده‌اند.

ساختار کلی کتاب از بخش‌های مجزا تشکیل شده است که این امر استفاده از آن را برای دوره‌هایی با مدت و سطوح متفاوت تسهیل می‌کند. برای مطالعه این کتاب به دانش اولیه‌ای از اصول مقاومت مصالح و ارتعاشات نیاز است. از منظر ریاضی نیز داشتن اطلاعاتی در زمینه‌های حساب دیفرانسیل، عملیات جبری، روش‌های برداری و تحلیل ماتریسی ضروری است.

فصل اول در زمینه روش‌های فرمول‌بندی معادلات حرکت سیستم‌های دینامیکی است. در این فصل علاوه بر معرفی روش‌های مختلف، برتری‌ها و کاستی‌های هر یک از آنها مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. توضیحات بیشتر نیز برای درک ساده‌تر، در بخش ضمیمه ارائه شده است. در ساده‌ترین روش‌ها، معادلات حرکت از روابط انرژی جنبشی و کرنشی و کار مجازی انجام شده به وسیله بارهای خارجی، استخراج می‌شوند. در فصل دوم این روابط برای المان‌های مختلف سازه‌ای استخراج شده است.

به دلیل پیچیدگی سازه‌های کاربردی نمی‌توان پاسخ آن‌ها را با استفاده از روش‌های تحلیلی به دست آورد. این مشکل به کمک روش‌های تقریبی برطرف می‌شود. فصل سوم با بحث در مورد تکنیک‌های شناخته شده‌ای مانند روش ریلی-رتیز آغاز شده و سپس روش تغییرمکان اجزای محدود به عنوان تعمیم روش ریلی-رتیز معرفی می‌شود. ویژگی‌های اصلی این روش با بررسی المان‌های میله‌ای، محوری، تیری و قاب معرفی می‌شوند. بدین ترتیب ماتریس‌های مربوط به هر کدام از این المان‌ها به صورت صریح محاسبه می‌گردند. البته ماتریس‌های بسیاری از المان‌های ارائه شده در فصول بعد تنها توسط تکنیک‌های انتگرال‌گیری عددی محاسبه می‌شوند. بدین منظور ابتدا انتگرال‌گیری عددی یک بعدی معرفی گردیده و سپس تعمیم آن برای حالت دوبعدی و سه‌بعدی نیز در بخش‌های مورد نیاز ارائه شده است.

در فصل چهارم روابط مورد نیاز برای المان‌های غشایی مختلفی استخراج شده‌اند که در تحلیل سازه‌هایی با صفحات تخت و دارای نوسان در صفحه خود مورد استفاده قرار می‌گیرند. فصل ۵ در مورد ارتعاش اجسام سه‌بعدی، با استفاده از المان‌های متقارن محوری و سه‌بعدی است. فصل ۶ مشکلات پیش‌رو در توسعه المان‌های دقیق صفحه‌ای خمشی را نشان می‌دهد که برای برطرف ساختن آن‌ها المان‌های زیادی به وجود آمده‌اند. در فصل ۷ روش‌های تحلیل ارتعاشات سازه‌هایی با صفحات تقویت‌شده و تاشده شامل ترکیبی از المان‌های قاب، غشایی و صفحه‌ای خمشی توضیح داده شده در فصول قبلی تشریح شده است. افزون بر این‌ها، مسائل چالش‌برانگیز و نحوه فائق آمدن بر آن‌ها نیز توضیح داده شده است.

## ل □ روش اجزای محدود در تحلیل ارتعاشات

در فصول ۸ و ۹ و ۱۰ روش‌های حل معادلات حرکت ارائه شده‌اند. در فصل ۸ معادلات ارتعاش سازه‌های بدون میرایی که به صورت مسائل مقدار ویژه خطی هستند بررسی شده‌اند. همچنین ضمن توضیح روش‌های حل موجود در برنامه‌های تجاری اجزای محدود، در این زمینه اطلاعاتی از این روش‌ها به کاربر اجزای محدود داده می‌شود. مهندسان و پژوهشگران علاقه‌مند به تکوین برنامه‌های اجزای محدود در صورت نیاز می‌توانند به مراجع ذکر شده مراجعه کنند. سپس روش‌های کاهش درجات آزادی از جمله استفاده از تقارن، تحلیل سازه‌های متناوب دوار، کاهش گویان و ترکیب مود-مؤلفه‌ای ارائه شده است.

روش‌های محاسبه پاسخ سازه‌ها به بارهای هارمونیک، تناوبی، گذرا و تصادفی در فصول ۹ و ۱۰ توضیح داده شده‌اند. روش‌های ارائه میرایی نیز مورد بحث قرار گرفته‌است.

محاسبه پاسخ سازه به بارهای گذرا شامل استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری گام به گام است. پایداری و دقت این روش‌ها از نکات مهمی است که مورد بحث قرار گرفته‌است. به‌علاوه، پاسخ سازه‌ها به تغییرمکان‌های اعمالی و روش‌های طیف پاسخ نیز بررسی شده‌اند.

فصل ۱۱ در مورد تکنیک‌های تحلیل به کمک کامپیوتر است که در آن روش استفاده صحیح از برنامه‌های تجاری توضیح داده شده‌است و افرادی که خود به نوشتن برنامه تمایل دارند، به مراجع مناسب در این زمینه رجوع داده شده‌اند.

در فصول ۳ تا ۷ جزئیات المان‌های ساده‌تر ارائه شده‌اند. در انتهای هر فصل نیز به تکنیک‌های پیشرفته‌تر رجوع داده شده است که هر کدام شامل فهرست وسیعی از مراجع مرتبط است. در سرتاسر کتاب مثال‌های عددی متنوعی به منظور نشان دادن دقت روش‌های مورد استفاده ارائه شده‌است.

در پایان فصول ۱ تا ۹، تعدادی مسئله برای تمرین و استفاده از تکنیک‌های توضیح داده شده، گنجانده شده‌اند. بسیاری از آن‌ها را می‌توان به صورت دستی حل کرد و تعدادی هم که مستلزم استفاده از برنامه اجزای محدود هستند، مشخص شده‌اند. برنامه اجزای محدود مناسب نیز برای نمونه در فصل ۱۲ توضیح داده شده است.

## نمادگذاری

فهرستی از نمادهای اصلی به کار رفته، در ادامه درج می‌شود. نمادهایی که تنها به صورت محلی مورد نیاز هستند و ممکن است در زمینه‌های مختلف در بردارنده معانی متفاوتی باشند، هر کدام در زمان استفاده تعریف شده‌اند.

## نمادهای ریاضی

[ ] ماتریس مربعی یا مستطیلی

[ ] ماتریس قطری

[ ] ماتریس سطری

{ } ماتریس ستونی

| | دترمینان ماتریس

[ ]<sup>T</sup> ماتریس ترانپازه

[ ]<sup>-1</sup> ماتریس معکوس

$$[ ]^{-T} \equiv ([ ]^{-1})^T \equiv ([ ]^T)^{-1} \text{ : معکوس ترانپازه}$$

[ ]<sup>H</sup> مزدوج مختلط ماتریس ترانپازه

## نمادهای لاتین

A مساحت

[B] ماتریس کرنش-تغییر مکان

[C] ماتریس میرایی کلی

D تابع اتلاف

[D] ماتریس ثابت‌های مصالح یا ماتریس استحکام

E مدول یانگ

{f} نیروهای معادل گره‌ای

G مدول برشی

h ضخامت صفحه

I گشتاور دوم مقطع تیر

[I] ماتریس همانی

J ثابت پیچش

[J] ماتریس ژاکوبین

k سختی فنر

[k] ماتریس سختی المان

ن □ روش اجزای محدود در تحلیل ارتعاشات

[K] ماتریس سختی کلی  
[m] ماتریس جرم المان  
[M] ماتریس جرم کلی  
[N] و [N] ماتریس توابع تغییر مکان مفروض  
{q} مختصات مودال  
[Q] نیروهای مودال  
 $r, \theta, z$  مختصات استوانه‌ای  
t زمان  
T انرژی جنبشی  
u, v, w مؤلفه‌های تغییر مکان  
{u} ماتریس ستونی تغییر مکان‌های گره‌ای  
U انرژی کرنشی  
V حجم  
W کار انجام شده نیروهای اعمالی  
x, y, z مختصات کارترین محلی  
X, Y, Z مختصات کارترین کلی

### نمادهای یونانی

[ $\alpha$ ] ماتریس پذیرش  
 $\gamma$  نسبت میرایی  
 $\Delta$  عملگر نمو  
 $\delta$  عملگر مجازی  
{ $\epsilon$ } مؤلفه‌های کرنش  
 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  دوران حول محورهای کارترین  
 $\kappa$  ضریب برش  
 $\lambda$  مقدار ویژه  
 $\nu$  نسبت پواسن  
 $\xi, \eta, \zeta$  مختصات هم‌پارامتر  
 $\rho$  جرم واحد حجم  
{ $\sigma$ } مؤلفه‌های تنش  
 $\varphi$  بردار ویژه (شکل مود)  
 $\Phi$  ماتریس مودال  
 $\omega$  فرکانس زاویه‌ای بر حسب رادیان بر ثانیه