

# آمار و احتمال

## (برای رشته‌های اقتصاد و مدیریت)

تألیف

دکتر محسن مهرآرا (هیئت علمی دانشگاه تهران)  
دکتر سجاد برخوردار (هیئت علمی دانشگاه تهران)



شماره مسلسل ۹۰۱۹

شماره انتشار ۳۸۰۵

انتشارات دانشگاه تهران

سرشناسه	: مهرآرا، محسن، ۱۳۴۶-
عنوان و نام پدیدآور	: آمار و احتمال برای رشته‌های اقتصاد و مدیریت/ تألیف محسن مهرآرا، سجاد برخوردار.
مشخصات نشر	: تهران: دانشگاه تهران، مؤسسه انتشارات، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	: ۵۰۴ ص.: مصور، جدول، نمودار.
فروست	: انتشارات دانشگاه تهران؛ شماره انتشار ۳۸۰۵.
شابک	: 978-964-03-7022-3
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
موضوع	: آمار-- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: آمار-- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
موضوع	: احتمالات-- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	: احتمالات-- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
موضوع	: دانشگاه‌ها و مدارس عالی-- ایران-- آزمون‌ها
موضوع	: آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی-- ایران
شناسه افزوده	: برخوردار، سجاد، ۱۳۶۲-
شناسه افزوده	: دانشگاه تهران. مؤسسه انتشارات
رده‌بندی کنگره	: QA ۲۷۶/۲/۹۱۸ ۱۳۹۶
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۹/۵۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۵۹۳۰۴۴

این کتاب مشمول قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان است. تکثیر کتاب به هر روش اعم از فتوکپی، ریسوگرافی، تهیه فایل‌های pdf، لوح فشرده، بازنویسی در وبلاگ‌ها، سایت‌ها، مجله‌ها و کتاب، بدون اجازه کتبی ناشر مجاز نیست و موجب پیگرد قانونی می‌شود و تمامی حقوق برای ناشر محفوظ است.

ISBN:978-964-03-7022-3



9 789640 370223

عنوان: آمار و احتمال (برای رشته‌های اقتصاد و مدیریت)

تألیف: دکتر محسن مهرآرا- دکتر سجاد برخوردار

نوبت چاپ: اول

تاریخ انتشار: ۱۳۹۶

شمارگان: ۵۰۰ نسخه

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

چاپ و صحافی: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

«مسئولیت صحت مطالب کتاب با مؤلفان است»

بها: ۳۲۰۰۰۰ ریال

خیابان کارگر شمالی - خیابان شهید فرشی مقدم - مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

پست الکترونیک: [press@ut.ac.ir](mailto:press@ut.ac.ir) - تارنما: <http://press.ut.ac.ir>

پخش و فروش: تلفکس ۸۸۳۳۸۷۱۲

تقدیم به روح پاک پدرم

سجاد برخورداری



## فهرست مطالب

### فصل اول: مفاهیم و تعاریف

مقدمه	۲
۱-۱- مفهوم آمار	۲
۲-۱- آمار توصیفی	۳
۳-۱- آمار استنباطی	۱۰
پیوست	۱۳

### فصل دوم: خلاصه کردن داده‌ها از طریق جداول و نمودارها

مقدمه	۲۲
۱-۲- جدول‌های توزیع فراوانی	۲۲
۱-۱-۲- جدول‌های توزیع فراوانی برای داده‌های کمی	۲۲
۲-۱-۲- توزیع فراوانی داده‌های کمی پیوسته (فراوانی فاصله)	۲۵
۳-۱-۲- جدول توزیع فراوانی برای داده‌های کیفی	۳۱
۴-۱-۲- حدود واقعی و عنوان شده (روش سنتی طبقه‌بندی داده‌ها)	۳۴
۵-۱-۲- مراحل تشکیل جدول توزیع فراوانی	۳۹
۶-۱-۲- چگالی فراوانی	۴۶
۲-۲- نمودارهای توزیع فراوانی	۴۸
۱-۲-۲- نمودارهای فراوانی داده‌های کیفی	۴۸
۲-۲-۲- نمودارهای فراوانی برای داده‌های کمی گسسته	۵۴
۳-۲-۲- نمودارهای فراوانی برای داده‌های کمی پیوسته	۵۷
۴-۲-۲- نمودار توزیع فراوانی برای یک متغیر پیوسته در جامعه نامتناهی یا منحنی تابع چگالی	۶۵
۳-۲-۳- منحنی‌های توزیع فراوانی و انواع آن	۶۹

فهرست □ ج

۷۳	۱-۳-۲- پلی گن یا نمودار چندضلعی فراوانی تجمعی برای متغیر کمی پیوسته.....
۷۴	۲-۳-۲- نمودار فراوانی تجمعی برای متغیر کمی گسسته.....
۷۶	۳-۳-۲- نمودار فراوانی تجمعی برای متغیر کمی پیوسته در جامعه نامتناهی.....
۷۸	پیوست .....
۸۲	مسائل پایان فصل.....

**فصل سوم: شاخص‌های مرکزی**

۸۸	مقدمه .....
۸۸	۳- شاخص‌های مرکزی.....
۸۹	۱-۳- میانگین .....
۸۹	۱-۱-۳- میانگین حسابی.....
۹۷	۲-۱-۳- میانگین موزون (وزنی).....
۱۰۳	۲-۱-۳- میانگین هندسی .....
۱۱۰	۴-۱-۳- میانگین هارمونیک یا همساز یا توافقی معکوس.....
۱۱۷	۵-۱-۳- میانگین پیراسته.....
۱۲۱	۲-۳- میانه.....
۱۳۷	۳-۳- چندک‌ها.....
۱۳۹	۴-۳- مد یا نما.....
۱۴۵	مسائل پایان فصل.....
۱۵۲	سؤالات چهارگزینه‌ای .....
۱۵۶	پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای .....

**فصل چهارم: شاخص‌های پراکندگی**

۱۶۲	مقدمه .....
۱۶۳	۱-۴- دامنه .....
۱۶۵	۲-۴- متوسط قدر مطلق انحرافات از میانگین.....
۱۶۸	۳-۴- واریانس یا متوسط مجذور انحرافات از میانگین.....
۱۷۴	۴-۴- نیم‌واریانس .....
۱۷۵	۵-۴- انحراف معیار .....

ح □ آمار و احتمال (برای رشته‌های اقتصاد و مدیریت)

۱۷۸.....	۶-۴- گشتاورهای آماری .....
۱۷۹.....	۱-۶-۴- گشتاورهای عمومی.....
۱۷۹.....	۲-۶-۴- گشتاورهای اولیه.....
۱۸۰.....	۳-۶-۴- گشتاورهای مرکزی.....
۱۸۶.....	۷-۴- تصحیح شیپارد.....
۱۸۸.....	۸-۴- دامنه بین چارکی .....
۱۸۸.....	۹-۴- نیمه دامنه بین چارکی.....
۱۹۰.....	۱۰-۴- معیارهای پراکندگی نسبی.....
۱۹۰.....	۱-۱۰-۴- ضریب تغییرات یا ضریب پراکندگی.....
۱۹۵.....	۲-۱۰-۴- ضریب چولگی.....
۲۰۰.....	۳-۱۰-۴- کشیدگی.....
۲۰۵.....	مسائل پایان فصل.....
۲۱۲.....	سؤالات چهارگزینه‌ای.....
۲۱۸.....	پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای.....

فصل پنجم: آنالیز ترکیبی و احتمال

۲۲۸.....	مقدمه .....
۲۲۸.....	۱-۵- اصول آنالیز ترکیبی.....
۲۲۸.....	۱-۱-۵- اصل پایه‌ای شمارش.....
۲۳۰.....	۲-۱-۵- جایگشت‌ها یا تبدیل‌ها.....
۲۳۳.....	۳-۱-۵- ترکیب‌ها.....
۲۳۵.....	۲-۵- احتمال.....
۲۳۵.....	۱-۲-۵- برآمدهای آزمایش.....
۲۳۵.....	۲-۲-۵- فضای نمونه‌ای.....
۲۳۶.....	۳-۲-۵- پیشامدها (حادثه‌ها).....
۲۳۹.....	۴-۲-۵- قوانین دمورگان.....
۲۴۰.....	۵-۲-۵- اصول احتمال.....
۲۴۳.....	۶-۲-۵- قضایای احتمال.....
۲۴۶.....	۳-۵- احتمال شرطی.....

فهرست □ خ

۲۴۹	۴-۵- قاعده ضرب احتمال
۲۵۰	۵-۵- پیشامدهای مستقل
۲۵۳	۱-۵-۵- تعمیم استقلال پیشامدها
۲۵۳	۶-۵- قانون احتمال کل
۲۵۶	۷-۵- قضیه بیز
۲۵۹	مسائل پایان فصل
۲۷۵	سؤالات چهارگزینه‌ای
۲۸۱	پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای

فصل ششم: متغیرهای تصادفی

۲۹۰	مقدمه
۲۹۰	۱-۶- متغیرهای تصادفی
۲۹۳	۲-۶- متغیرهای تصادفی گسسته
۲۹۳	۱-۲-۶- تابع توزیع احتمال
۲۹۵	۲-۲-۶- تابع توزیع تجمعی
۲۹۷	۳-۲-۶- نمایش تابع توزیع تجمعی $F(x)$ براساس تابع توزیع احتمال $f(x)$
۲۹۹	۴-۲-۶- نمایش ترسیمی توزیع احتمال
۳۰۲	۵-۲-۶- امید ریاضی در تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته
۳۰۶	۶-۲-۶- واریانس کمیت تصادفی گسسته
۳۰۷	۷-۲-۶- میانگین کمیت تصادفی گسسته
۳۰۷	۸-۲-۶- چندکهای کمیت تصادفی گسسته
۳۰۸	۹-۲-۶- مد یا نمای کمیت تصادفی گسسته
۳۱۱	۱۰-۲-۶- تابع احتمال $Y=g(X)$ برای کمیت تصادفی گسسته $X$
۳۱۳	۳-۶- متغیرهای تصادفی پیوسته
۳۱۳	۱-۳-۶- تابع چگالی احتمال پیوسته
۳۱۶	۲-۳-۶- محاسبه احتمال در بازه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته
۳۱۹	۳-۳-۶- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته
۳۲۴	۴-۳-۶- امید ریاضی در تابع احتمال متغیر تصادفی پیوسته
۳۲۵	۵-۳-۶- امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی پیوسته $x$ $[E(g(x))]$

۳۲۶.....	۶-۳-۶- واریانس کمیت تصادفی پیوسته.....
۳۲۷.....	۶-۳-۷- شاخص‌های مرکزی درمتغیرهای تصادفی پیوسته.....
۳۳۳.....	۶-۴-۴- تابع مولد گشتاورها.....
۳۳۵.....	۶-۴-۱- ویژگی‌های تابع مولد گشتاورها.....
۳۳۷.....	۶-۵-۵- تابع چگالی $Y=g(X)$ در توابع پیوسته.....
۳۳۷.....	۶-۶-۶- توزیع احتمال توأم (مشترک).....
۳۳۸.....	۶-۶-۱- تابع توأم گسسته.....
۳۴۰.....	۶-۶-۲- محاسبه احتمال در توابع توأم گسسته.....
۳۴۱.....	۶-۷-۷- تابع حاشیه‌ای (کناره‌ای).....
۳۴۳.....	۶-۸-۸- تابع توزیع تجمعی توأم متغیرهای تصادفی $Y, X$ .....
۳۴۳.....	۶-۸-۱- ویژگی‌های تابع توزیع تجمعی.....
۳۴۵.....	۶-۹-۹- تابع چگالی احتمال توأم (مشترک).....
۳۴۶.....	۶-۱۰-۱۰- محاسبه احتمال در توابع پیوسته توأم.....
۳۴۸.....	۶-۱۱-۱۱- تابع توزیع تجمعی توأم پیوسته.....
۳۵۲.....	۶-۱۲-۱۲- تابع چگالی احتمالی حاشیه‌ای $X$ .....
۳۵۳.....	۶-۱۳-۱۳- توزیع‌های شرطی.....
۳۵۵.....	۶-۱۳-۱- تابع چگالی احتمال شرطی.....
۳۵۶.....	۶-۱۳-۲- استقلال متغیرهای تصادفی.....
۳۵۹.....	۶-۱۳-۳- امید ریاضی شرطی.....
۳۶۲.....	۶-۱۴-۱۴- محاسبه تابع چگالی توأم از روی تابع توزیع توأم پیوسته.....
۳۶۲.....	۶-۱۵-۱۵- مشخص کننده‌های عددی توزیع‌های دو متغیره.....
۳۶۶.....	مسائل پایان فصل.....
۳۷۱.....	سؤالات چهارگزینه‌ای.....
۳۷۸.....	پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای.....

### فصل هفتم: توزیع‌های گسسته و پیوسته

۳۹۰.....	مقدمه.....
۳۹۰.....	۷-۱-۱- توزیع‌های گسسته.....
۳۹۰.....	۷-۱-۱-۱- توزیع یکنواخت گسسته.....



فهرست □ ذ

۳۹۲	.....	توزیع احتمال برنولی
۳۹۳	.....	توزیع احتمال دو جمله‌ای
۴۰۵	.....	توزیع احتمال هندسی
۴۱۲	.....	توزیع احتمال دو جمله‌ای منفی
۴۱۶	.....	توزیع احتمال فوق هندسی
۴۲۲	.....	توزیع احتمال پواسون
۴۲۵	.....	توابع احتمال پیوسته
۴۲۷	.....	توزیع احتمال یکنواخت پیوسته
۴۲۸	.....	توزیع احتمال نرمال
۴۳۰	.....	توزیع احتمال نرمال استاندارد
۴۳۴	.....	توزیع احتمال گاما
۴۴۰	.....	توزیع احتمال بتا
۴۴۴	.....	مسائل پایان فصل
۴۶۴	.....	سؤالات چهار گزینه‌ای
۴۶۹	.....	پاسخ سوالات چهار گزینه‌ای
۴۷۷	.....	جداول پیوست
۴۹۱	.....	منابع

## پیش‌گفتار

مباحث آمار از جمله مباحث بسیار مهم برای رشته‌های اقتصاد و مدیریت به شمار می‌آید. این مباحث کمک می‌کند دانشجویان و پژوهشگران رشته‌های اقتصاد و مدیریت، بتوانند کارهای قابل قبول علمی ارائه دهند. در واقع، مباحث آماری ابزار بسیار مهم برای کارهای تحقیقاتی به شمار می‌آید.

مباحث گسترده‌ای در علم آمار وجود دارد که هر یک از علوم مختلف متناسب با نیاز خود، از این مباحث بهره می‌گیرند. رشته‌های اقتصاد و مدیریت نیز تقریباً از تمام مباحث علم آمار به منظور بررسی پدیده‌ها و تحلیل آنها بهره می‌گیرند. رشته‌های اقتصاد علاوه بر استفاده مستقیم از مباحث آماری، از این مباحث به عنوان مبانی برای مباحث تکمیلی در درس اقتصاد سنجی نیز استفاده می‌کنند.

با توجه به اهمیت مباحث آماری در رشته‌های اقتصاد و مدیریت، ضروری است مباحث علم آمار با مسائل کاربردی در این رشته‌ها به مخاطبان ارائه شود. این امر به تعمیق یادگیری روش‌های آماری در این رشته‌ها کمک شایانی می‌کند. در کتاب‌های مختلف تلاش شده است مباحث آماری برای رشته‌های اقتصاد و مدیریت ارائه شود اما مسائلی کاربردی در این حوزه‌ها اندک بوده و برخی از مباحث که در ادبیات جدید این رشته‌ها مورد نیاز است، کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

در کتاب حاضر تلاش شده است مباحث آماری مورد نیاز رشته‌های اقتصاد و مدیریت به صورت کامل و با مسائل کاربردی به مخاطبان ارائه شود. در نگارش این کتاب تلاش شده است علاوه بر ارائه مباحث نظری، مسائل کاربردی نیز حل شود. همچنین در این کتاب در پایان هر فصل علاوه بر مسائل پایانی، سؤالات آزمون ورودی کارشناسی ارشد رشته‌های اقتصاد، مدیریت و حسابداری و نیز پاسخ تشریحی سؤالات ارائه شده است.

کتاب حاضر در هفت فصل به شرح زیر تدوین شده است:

فصل اول- در این فصل تلاش شده است به مفاهیم پایه آمار پرداخته شده و در بخش پیوست فصل، انواع مقیاس‌های اندازه‌گیری بحث شود.

فصل دوم- در این فصل روش‌های مختلف خلاصه کردن داده‌ها از طریق جدول و نمودار بحث شده است. این مباحث برای هر دو دسته از داده‌های کمی و کیفی ارائه شده و در ادامه فصل، به بحث داده‌های گسسته و پیوسته نیز پرداخته شده است.

فصل سوم- در این فصل شاخص‌های مرکزی مورد بحث قرار گرفته است. انواع شاخص‌های مرکزی شامل انواع میانگین (میانگین حسابی، میانگین موزون، میانگین هندسی، هارمونیک و میانگین پیراسته)، میانه، چندک‌ها و مد یا نما و نحوه محاسبه آنها در داده‌های طبقه‌بندی شده و طبقه‌بندی نشده مورد بحث قرار گرفته است. فصل چهارم- در این فصل شاخص‌های پراکندگی شامل دامنه تغییرات، متوسط قدر مطلق انحرافات از میانگین، واریانس، نیمه واریانس، انحراف معیار، گشتاورها و معیارهای پراکندگی نسبی مورد بحث قرار گرفته است.

فصل پنجم- در این فصل مباحث آنالیز ترکیبی و احتمال ارائه شده است. برای این منظور، ابتدا اصول آنالیز ترکیبی بحث شده است. در ادامه اصول احتمال مورد بحث قرار گرفته است. در ادامه این فصل به بحث‌هایی

مانند احتمال شرطی، قاعده ضرب احتمال، پیشامدهای مستقل، قانون احتمال کل و قضیه بیز نیز پرداخته شده است.

فصل ششم- در این فصل مباحث مرتبط با متغیرهای تصادفی ارایه شده است. بعد از تعریف متغیرهای تصادفی، نحوه نمایش و نحوه محاسبه شاخص‌های مرکزی و پراکندگی آنها بحث شده است. در ادامه مباحث، بحث توابع مولد گشتاورها، توزیع‌های شرطی و مشخص‌کننده‌های عددی توزیع‌های دو متغیره ارایه شده است.

فصل هفتم- در این فصل به بحث انواع توزیع‌های گسسته و پیوسته پرداخته شده است. توزیع‌های مختلف مانند توزیع یکنواخت گسسته، توزیع برنولی، توزیع دوجمله‌ای، توزیع هندسی، توزیع دوجمله‌ای منفی، توزیع فوق هندسی و توزیع پواسون به عنوان توزیع‌های گسسته بحث شده اند. در توزیع‌های پیوسته نیز به توزیع‌های یکنواخت پیوسته، توزیع نرمال، توزیع نرمال استاندارد، توزیع گاما و توزیع بتا پرداخت شده است.

این کتاب در واقع کتاب جامعی در مباحث آمار و احتمال برای دانشجویان و پژوهشگران رشته‌های اقتصاد و مدیریت به شمار می‌آید. مباحث این کتاب علاوه بر پوشش مباحث آمار (۱) برای رشته‌های اقتصاد و مدیریت، برای درس آمار رشته‌های حسابداری نیز مفید است. همچنین این کتاب برای دانشجویانی که برای آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری در رشته‌های یادشده تلاش می‌کنند، مفید است. این کتاب نیز به دور از اشکال نبوده و اساتید محترم و دانشجویان عزیز می‌توانند نظرات سازنده خود را در ارتباط با این کتاب با نویسندگان از طریق ایمیل در میان بگذارند.

محسن مهرآرا (هیئت علمی دانشگاه تهران)  
سجاد برخوردار (هیئت علمی دانشگاه تهران)